

Lösung der schriftlichen Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Lösung Aufgabe 1:

- a) 1 Staupunkt bei  $x = 0$ ,  $y = 0$ . (Bedingung  $\vec{v} = 0$ .)  
b) Die dreidimensionale Energiegleichung lautet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Integration

$$y = \frac{C}{x}$$

Mit R.B.  $y(x_P) = y_P$

$$y = \frac{x_P \cdot y_P}{x}$$

Die Kurven sind Hyperbeln. Gleichung der Stromlinie durch P(-2|2):

$$y = -\frac{4}{x}$$

- c) Für  $x(t)$ :

$$\frac{dx}{dt} = u = -k \cdot x \cdot t$$

Integration

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

Mit R.B.  $x(t = 0) = x_P$  folgt  $C_1 = x_P$ . Ergebnis:

$$x(t) = x_P \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

Für  $y(t)$ :

$$\frac{dy}{dt} = v = k \cdot y \cdot t$$

Integration

$$y(t) = C_2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

Mit R.B.  $y(t = 0) = y_P$  folgt  $C_2 = y_P$ . Ergebnis:

$$y(t) = y_P \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

d) Aus

$$x(t) = x_P \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

folgt

$$\ln \frac{x}{x_P} = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2$$

und aus

$$y(t) = y_P \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

folgt

$$\ln \frac{y}{y_P} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\ln \frac{y}{y_P} + \ln \frac{x}{x_P} = 0$$

oder

$$\frac{y}{y_P} = -\frac{x}{x_P}$$

Damit lautet die Gleichung

$$y = \frac{x_P \cdot y_P}{x}$$

Die Teilchenbahnen sind Hyperbeln, die nicht von der Zeit abhängen, d. h. sie sind richtungsstationär.

e) Es gilt  $x(t = 0) = x_1$  und  $x(t = \Delta t) = x_2$

$$x_1 = x_P$$

$$x_2 = x_P \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta t)^2}$$

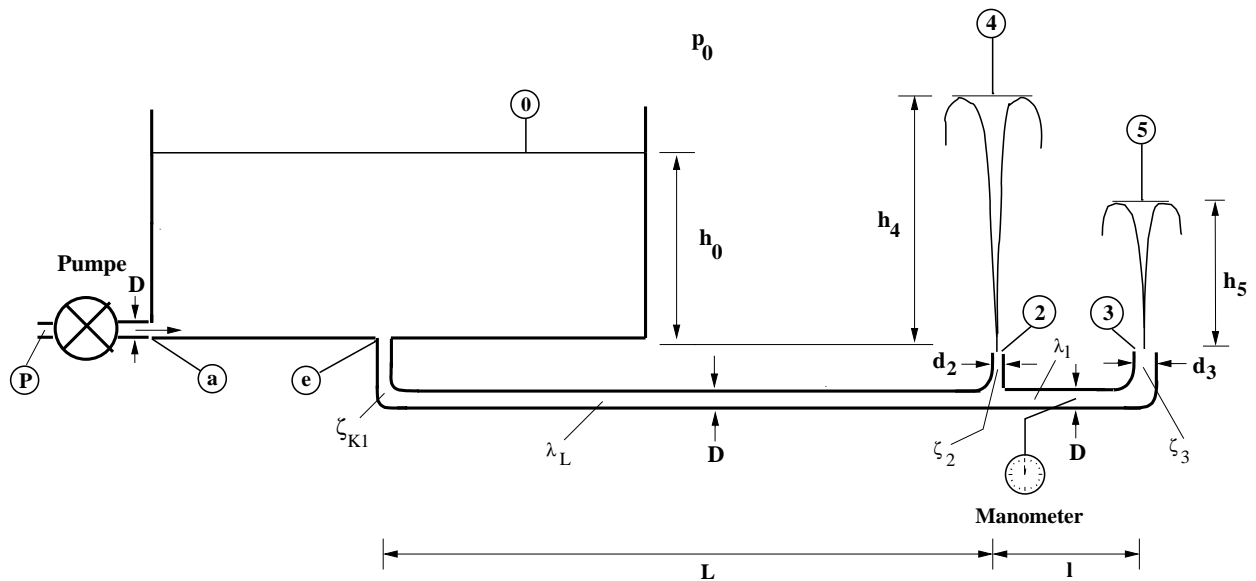
Daraus folgt:

$$x_2 = x_1 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta t)^2}$$

Nach  $\Delta t$  aufgelöst:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{K} \cdot \ln \frac{x_1}{x_2}}$$

## Lösung Aufgabe 2:



- a) Zur Lösung können zuerst die Geschwindigkeiten an den Stelle 2 und 3 berechnet werden. Mit der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle 2 und 4 (s. Abb.) angewendet ergeben sich:

$$p_2 + \rho \frac{c_2^2}{2} = p_4 + \rho \frac{c_4^2}{2} + \rho g h_4 \quad (1)$$

Die Bernoulli-Gleichung ist hier verlustlos geschrieben worden. Da die Strömung verlustfrei ausströmt. Für die Drücke  $p_2$  und  $p_3$  gilt:  $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_0$ , wobei  $p_0$  der Druck der Atmosphäre ist. Die Geschwindigkeit  $c_4$  am Ende der Fontäne ist ungefähr Null. Die Geschwindigkeit  $c_2$  gilt dann:

$$c_2 = \sqrt{2gh_4} = 12.522m/s \quad (2)$$

Mit einem Stromfaden vom Punkt 3 bis Punkt 5 und die selbe Betrachtungen vorher gemacht erhält man für die Geschwindigkeit  $c_3$ :

$$c_3 = \sqrt{2gh_5} = 11.71324m/s \quad (3)$$

Um die Verluste entlang des Rohrs zu betrachten, muss man die Innengeschwindigkeit kennen. Unmittelbar vor der Verzweigung des Rohrs (Stelle 1 in Abb.) kann man diese Geschwindigkeit berechnen, mit einem Volumenstrom Bilanz. Mit der Konti-Gleichung erhält man:

$$\frac{\pi D^2 c_1}{4} = \frac{\pi d_2^2 c_2}{4} + \frac{\pi d_3^2 c_3}{4} \quad (4)$$

Wo  $c_1$  ist die gesuchte Geschwindigkeit. Damit gilt es:

$$c_1 = \frac{d_2^2 c_2 + d_3^2 c_3}{D^2} = 6.2202864m/s \quad (5)$$

Um die Höhe  $h_0$  zu bestimmen, kann man jetzt die Bernoulli-Gleichung mit Verlustglied entlang eines Stromfadens von der Stelle 0 bis einer beliebigen Stelle 2 oder 3:

$$p_0 + \rho \frac{c_0^2}{2} + \rho g h_0 = p_2 + \rho \frac{c_2^2}{2} + \Delta p_{v1-2} \quad (6)$$

Die Verluste sind in Reibungsverluste und Krümmerverluste unterteilt. Die Rohrreibungsverluste gelten  $\Delta p_{v,R}$  betragen  $\Delta p_{v,R} = \lambda_L(L/D) \cdot (\rho/2 \cdot c_1^2) + (\rho/2 \cdot c_2^2) \cdot \zeta_2$  und die Verluste in dem Krümmer gilt  $\rho/2 \cdot c_1^2 \cdot \zeta_{K1}$ . Die einzige unbekannte in der Gleichung (6) ist  $h_0$ . Die Geschwindigkeit  $c_0$  ist Null. Da der Wasserspiegel konstant bleibt. Für die statischen Drücke gilt  $p_0 = p_2$ . Man erhält dann:

$$h_0 = \frac{\frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \lambda_L(\frac{L}{D}) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + (\frac{\rho}{2} \cdot c_2^2) \cdot \zeta_2 + (\frac{\rho}{2} \cdot c_1^2) \cdot \zeta_{K1}}{\rho g} = 59.97m \quad (7)$$

- b) Um der statischen Druck zu berechnen muss man zuerst die Geschwindigkeit in den Rohr der Länge  $l$  berechnen. Mit der Hilfe der Konti-Gleichung ergibt sich:

$$\frac{\pi D^2}{4} c_M = \frac{\pi d_3^2}{4} c_3 \quad (8)$$

wo  $c_M$  ist die gesuchte Geschwindigkeit. Man erhält:

$$c_M = \frac{d_3^2}{D^2} c_3 = 4.2167664m/s \quad (9)$$

Mit der Anwendung der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle  $M$  zur Stelle 3 hat man:

$$p_M + \frac{\rho c_M^2}{2} = p_3 + \frac{\rho c_3^2}{2} + \Delta p_{M-3} \quad (10)$$

wo die Verluste gelten:

$$\Delta p_{M-3} = \left(\frac{\rho c_M^2}{2}\right) \left(\frac{\lambda_l \cdot l}{D}\right) + \frac{\rho c_3^2}{2} \cdot \zeta_3 \quad (11)$$

So erhält man für den gesuchten Druck:

$$p_M = 210013.1571Pa \quad (12)$$

- c) Die Leistung der Pumpe  $L_P$  berechnet sich aus:

$$L_P = \dot{V} \Delta l_P \quad (13)$$

Die Pumpe ist Verlustfrei und die Eintrittsgeschwindigkeit an der Stelle  $a$  ist gleich die Austrittsgeschwindigkeit  $c_1$ . Mit der Anwendung der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von Stelle  $P$  zur Stelle  $a$  erhält man:

$$p_P + \rho \frac{c_1^2}{2} = p_a + \rho \frac{c_1^2}{2} + \rho g h_0 - \Delta l_P \quad (14)$$

Da gilt es für den Druck  $p_a$ :  $p_a = p_0 + \rho g h_0$ . Die Energiezufuhr gilt dann:

$$\Delta l_P = p_0 - p_P + \rho g h_0 = 574006 \text{ Pa} \quad (15)$$

Die Volumenstrom  $\dot{V}$  berechnet sich aus:

$$\dot{V} = \frac{\pi D^2}{4} c_1 = 0.012207312 \text{ m}^3/\text{s} \quad (16)$$

Die Leistung der Pumpe gilt denn:

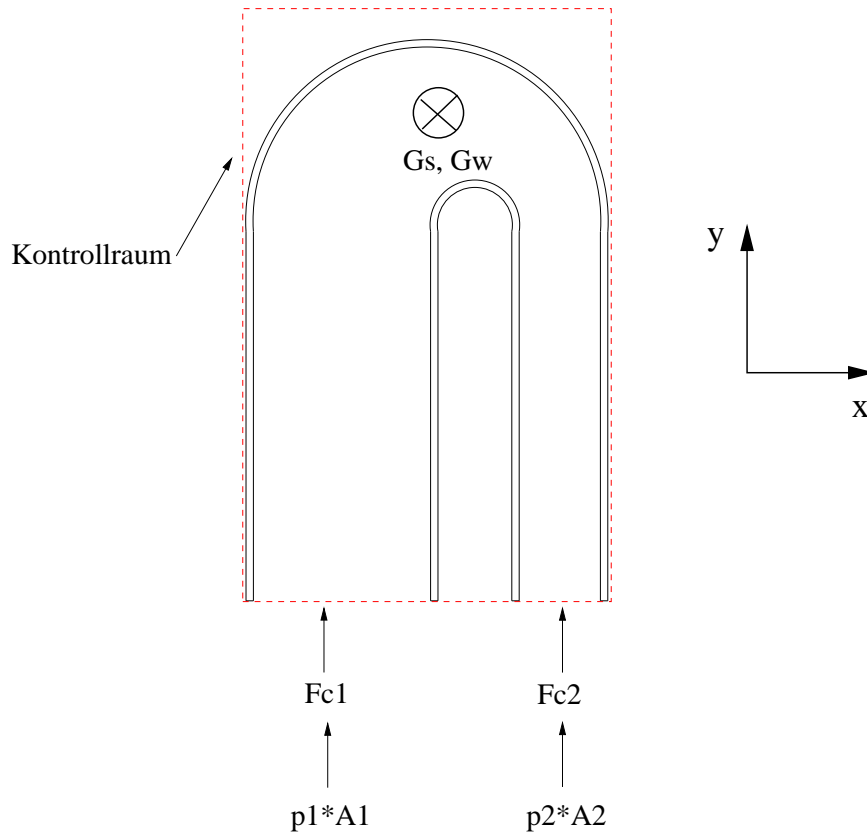
$$L_P = \dot{V} \Delta l_P = 7007.07 \text{ W} \quad (17)$$

- d) Um zu bestimmen ob die Strömung in dem Rohr der Länge  $L$  laminar oder turbulent ist, muss man die Reynoldszahl bezüglich die Geschwindigkeit  $c_1$  berechnen. Nach die Definition hat man:

$$Re = \frac{c_1 D}{\nu} = \frac{\mu c_1 D}{\rho} = 311014.32 > 2300 \quad (18)$$

wo  $\nu = \rho/\mu$ . Die Strömung ist dann turbulent.

Lösung Aufgabe 3:



$$a) \quad c_2(s) = \frac{\frac{1}{2} \cdot c_{2max}}{b_3} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot c_{2max}$$

$$b) \quad \dot{V} = A \cdot c = \text{konstant!} = A_1 \cdot c_1 = \int_A c_2(s) \, dA$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{\dot{V}}{h \cdot l_1}$$

$$\dot{V} = h \cdot \int_0^{b_3} \left( \frac{c_{2max}}{2 \cdot b_3} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot c_{2max} \right) ds$$

$$= h \cdot \left[ \frac{c_{2max}}{4 \cdot b_3} \cdot s^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{2max} \cdot s \right]_0^{b_3}$$

$$= h \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot c_{2max} \cdot b_3 + \frac{1}{2} \cdot c_{2max} \cdot b_3 \right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot h \cdot c_{2max} \cdot b_3$$

$$\Rightarrow c_{2max} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{3 \cdot b_3 \cdot h}$$

$$c) \quad \text{Impulssatz allgemein:} \quad F_c = - \int_A \rho \cdot \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, dA \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{c1} = \int_x \rho \cdot \vec{c}_1^2 \cdot h \cdot dx \quad c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{c1} = \rho \cdot h \cdot b_1 \cdot c_1^2$$

$$F_{c2} = \int_x \rho \cdot c_2(x)^2 \cdot h \cdot dx \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{c2} = \rho \cdot h \cdot \int_0^{b_3} \left( \frac{c_{2max}}{2 \cdot b_3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot c_{2max} \right)^2 dx$$

$$= \rho \cdot h \cdot \int_0^{b_3} \left( \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot x^2 + \frac{c_{2max}^2}{2 \cdot b_3} \cdot x + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \right) dx$$

$$= \rho \cdot h \cdot \left[ \left( \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot x \right) \right]_0^{b_3}$$

$$= \rho \cdot h \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 \frac{c_{2max}}{b_3} \right)$$

$$\Rightarrow F_{c2} = \frac{7}{12} \cdot \rho \cdot h \cdot b_3 \cdot c_{2max}^2 = \frac{28}{27} \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{h \cdot b_3}$$

Kräftebilanz in y-Richtung:

$$\sum F_x = 0 = F_x$$

$$\sum F_y = 0 = (p_1 - p_0) \cdot A_1 + F_{c1} + F_{c2} + F_y$$

$$A_1 = b_1 \cdot h$$

$$\Rightarrow F_y = -(p_1 - p_0) \cdot b_1 \cdot h - F_{c1} - F_{c2}$$

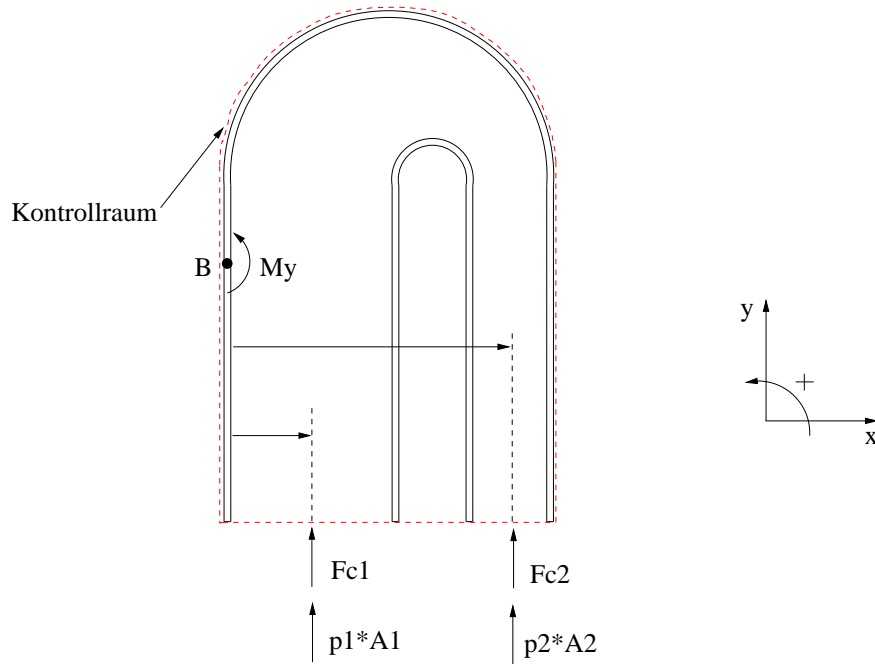
$$\Rightarrow F_y = -(p_1 - p_0) \cdot b_1 \cdot h - \rho \cdot h \cdot b_1 \cdot c_1^2 - \frac{28}{27} \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{h \cdot b_3}$$

Kräftebilanz in z-Richtung:

$$\sum F_z = 0 = F_z - G - G_W$$

$$\Rightarrow F_z = -G - V \cdot \rho \cdot g$$

d) Berechnung des Moments  $M_a$



Momentenbilanz um Punkt A:

Impulssatz allgemein:  $M = - \int_A \rho \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sum M = 0 = M_z + M_{p1} + M_{c1} + M_{c2}$$

$$M_{p1} = (p_1 - p_0) \cdot A_1 \cdot r_1 = (p_1 - p_0) \cdot h \cdot l_1 \cdot r_1 = \frac{1}{2} \cdot (p_1 - p_0) \cdot h \cdot l_1^2$$

$$M_{c1} = - \int_A \rho \cdot (\vec{r} \times \vec{c}_1) \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}) dA \quad r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{c1} = \int_0^{l_1} \rho \cdot r \cdot c_1^2 \cdot h dr$$

$$M_{c1} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_1^2 \cdot h \cdot l_1^2$$

$$M_{c2} = - \int_A \rho \cdot (\vec{r} \times \vec{c}_1) \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{n}) dA \quad r = \begin{pmatrix} r+a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Vereinfachung:  $a = l_1 + l_3$

$$M_{c2} = \rho \cdot h \cdot \int_0^{b_3} \left( \frac{c_{2max}}{2 \cdot b_3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot c_{2max} \right)^2 \cdot (a + r) dr$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \cdot h \cdot \int_0^{b_3} \left( \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot r^2 + \frac{c_{2max}^2}{2 \cdot b_3} \cdot r + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \right) \cdot (a + r) \, dr \\
&= \rho \cdot h \cdot \int_0^{b_3} \left( \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot r^2 \cdot a + \frac{c_{2max}^2}{2 \cdot b_3} \cdot r \cdot a + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot a \right) \, dr \\
&\quad + \rho \cdot h \cdot \int_0^{b_3} \left( \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot r^3 + \frac{c_{2max}^2}{2 \cdot b_3} \cdot r^2 + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot r \right) \, dr \\
&= \rho \cdot h \cdot \left[ \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot r^3 \cdot a + \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3} \cdot r^2 \cdot a + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot r \cdot a \right]_0^{b_3} \\
&\quad + \rho \cdot h \cdot \left[ \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot r^4 + \frac{c_{2max}^2}{6 \cdot b_3} \cdot r^3 + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \right]_0^{b_3} \\
&= \rho \cdot h \cdot \left( \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot b_3^3 \cdot a + \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3} \cdot b_3^2 \cdot a + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 \cdot a \right) \\
&\quad + \rho \cdot h \cdot \left( \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot b_3^4 + \frac{c_{2max}^2}{6 \cdot b_3} \cdot b_3^3 + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b_3^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_{c2} = \rho \cdot h \cdot c_{2max}^2 \cdot \left( a \cdot b_3 \cdot \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + b_3^2 \cdot \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \right) \right)$$

$$\Rightarrow M_{c2} = \rho \cdot h \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 \cdot \left( \frac{7}{12} \cdot a + \frac{17}{48} \cdot b_3 \right)$$

$$\Rightarrow M_y = M_{c1} + M_{c2} + M_{p1} + M_{p2}$$

### Lösung Aufgabe 4:

a) Ausgehen von quasi-stationärer turbulenter Strömung und Reynoldsansatz

T muß so gewählt werden, dass die Schwankungsgrößen herausgemittelt werden. Scheinbare Normal- und Schubspannungen: Zusätzlicher Term durch Quer- und Längsimpulsaustausch und nicht durch molekulare Viskosität.

b)

$$\begin{pmatrix} -\overline{\rho u'^2} & -\overline{\rho v' u'} & -\overline{\rho w' u'} \\ -\overline{\rho u' v'} & -\overline{\rho v'^2} & -\overline{\rho w' v'} \\ -\overline{\rho u' w'} & -\overline{\rho v' w'} & -\overline{\rho w'^2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2\mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} \right) & \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} \right) & \mu_t \left( \frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'}{\partial z} \right) \\ \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} \right) & 2\mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} \right) & \mu_t \left( \frac{\partial \bar{w}'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial z} \right) \\ \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial x} \right) & \mu_t \left( \frac{\partial \bar{v}'}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}'}{\partial y} \right) & 2\mu_t \left( \frac{\partial \bar{w}'}{\partial z} \right) \end{pmatrix} \quad (2)$$

d) Prandtlscher Mischungswegansatz

e)  $K=0.01 \sqrt{\frac{kg}{ms}}; \mu_{eff} = K^2$

in (4)  $\rightarrow \dot{\gamma} = -\frac{\sqrt{\gamma}}{K} + \frac{C}{K^2} = 0$

$\rightarrow \sqrt{\gamma} = \frac{1}{2K} \pm \sqrt{\frac{1}{4K^2} - \frac{C}{K^2}}$

$\rightarrow \dot{\gamma} = \frac{du}{dr} = \left( \frac{1}{2K} \pm \sqrt{\frac{1}{4K^2} - \frac{C}{K^2}} \right)^2$

Lösen der DGL und Einsetzen der Randbedingung

$\rightarrow u(r) = \frac{1}{4K^2} \cdot (1 \pm \sqrt{1 - 4C})^2 \cdot (r - R)$

### Lösung Aufgabe 5:

a) Machzahl Bestimmung am Eingang: Gleichung (2.73, Seite 91) und (2.75, Seite 92)

$$M_{e,1} := \frac{c_{e,1}}{\sqrt{\kappa RT_{e,1}}} = 0.31 \quad (1)$$

$$M_{e,2} := \frac{c_{e,2}}{\sqrt{\kappa RT_{e,2}}} = 0.5 \quad (2)$$

b) Machzahl Bestimmung an engster Stelle: Da Isentrop: Gleichung (2.79, Seite 97)

$$a_{m,1} = \sqrt{\kappa RT_{m,1}} = 310.54 \text{ms}^{-1} \quad (3)$$

$$a_{m,2} = \sqrt{\kappa RT_{m,2}} = 313.75 \text{ms}^{-1} \quad (4)$$

$$\frac{c_{e,1}^2}{2} + \frac{a_{e,1}^2}{\kappa - 1} = \frac{c_{m,1}^2}{2} + \frac{a_{m,1}^2}{\kappa - 1} \quad (5)$$

$$\frac{c_{e,2}^2}{2} + \frac{a_{e,2}^2}{\kappa - 1} = \frac{c_{m,2}^2}{2} + \frac{a_{m,2}^2}{\kappa - 1} \quad (6)$$

BEKANNT:  $c_{e,1}, a_{e,1}$  und  $a_{m,1}$  für LD1 und  $c_{e,2}, a_{e,2}$  und  $a_{m,2}$  für LD2

$$c_{m,1} = \sqrt{c_{e,1}^2 + \frac{2\kappa R(T_{1,e} - T_{1,m})}{\kappa - 1}} \quad (7)$$

$$c_{m,1} = 301.95 \text{ms}^{-1} \quad (8)$$

$$M_{m,1} = \frac{c_{m,1}}{a_{m,1}} = 0.97 \quad (9)$$

$$c_{m,2} = \sqrt{c_{e,2}^2 + \frac{2\kappa R(T_{2,e} - T_{2,m})}{\kappa - 1}} \quad (10)$$

$$c_{m,2} = 313.75 \text{ms}^{-1} \quad (11)$$

$$M_{m,2} = \frac{c_{m,2}}{a_{m,2}} = 1.0 \quad (12)$$

c) Machzahl Bestimmung an der Stelle mit  $A_{t,1}$  und  $A_{t,2}$

Weg: Ideale Gas-Glg. direkt unter Glg.(2.79 Seite 97), isentrope Gleichung (2.84, Seite 98)

$$p = R\rho T \quad (13)$$

$$p_{e,1} = 0,943 \text{bar} \quad (14)$$

$$\frac{p_{e,1}}{p_t} = \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{t,1}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{e,1}^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (15)$$

$$1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{t,1}^2 = \left( \frac{p_{e,1}}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{e,1}^2 \right) \quad (16)$$

$$M_{t,1} = 0,5 \quad (17)$$

$$p_{e,2} = R\rho_{e,2} T_{e,2} \quad (18)$$

$$p_{e,2} = 2,63 \text{bar} \quad (19)$$

$$\frac{p_t}{p_{e,2}} = \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{t,2}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{e,2}^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (20)$$

$$1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{t,2}^2 = \left( \frac{p_{e,2}}{p_t} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{e,2}^2 \right) \quad (21)$$

$$M_{t,2} = 1,5 \quad (22)$$

d) Ruhegrößen bei Isentropie Gleichung (2.82, 2.84 auf Seite 98)

$$T_{o,1} = T_{e,1} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{e,1}^2 \right) \quad (23)$$

$$T_{o,1} = 285,38K \quad (24)$$

$$P_{o,1} = P_{e,1} \left( \frac{T_{o,1}}{T_{e,1}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (25)$$

$$P_{o,1} = 1bar \quad (26)$$

$$T_{o,2} = T_{e,2} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{e,2}^2 \right) \quad (27)$$

$$T_{o,2} = 294K \quad (28)$$

$$P_{o,2} = P_{e,2} \left( \frac{T_{o,2}}{T_{e,2}} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (29)$$

$$P_{o,2} = 3,12bar \quad (30)$$

e) LD1 kein Stoss: Bernoulli Staudruck ist Summe vom statischen und dynamischen Anteil, LD2 Stoss-Glg. wegen Überschall vor Pitot-Rohr

Für LD1:

durch  $\rho_{e,1}$  und  $c_{e,1}$  gegeben:

$$P_{s,1} = P_{e,1} + \frac{\rho_{e,1}}{2} c_{e,1}^2 \quad (31)$$

$$P_{s,1} = 1bar \quad (32)$$

Die Staupunkttemperatur ist bei dem isentropen Übergang die Ruhe-Temperatur  $T_{s,1} = T_{o,1} = 285K$

Für LD2 sind nicht-isentrope Stoss-Glg. relevant. Konvention: alle Größen nach Stoss haben jeweils ein Dach

Der Druck nach dem Stoss ergibt sich aus Glg.(2.94, Seite 108)

$$\frac{\hat{P}_{s,2}}{P_t} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1} (M_{t,2}^2 - 1) \quad (33)$$

$$\hat{P}_{s,2} = 2,09bar \quad (34)$$

Die Temperatur nach dem Stoss ergibt sich aus Glg.(2.95, Seite 108)

$$\frac{\hat{T}_{s,2}}{T_t} = \left( 1 + \frac{2\kappa(M_{t,2}^2 - 1)}{\kappa + 1} \right) mal \quad (35)$$

$$\left( 1 - \frac{2}{\kappa + 1} \left( 1 - \frac{1}{M_{t,2}^2} \right) \right) \quad (36)$$

Um die Temperatur vor Stoss zu berechnen:

$$T_{o,2} = T_t \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{t,2}^2 \right) \quad (37)$$

$$T_t = 202,76K \quad (38)$$

$$\hat{T}_{s,2} = 267,63K \quad (39)$$

f) kompressibel, reibungsfrei, stationär

g) *Gegendruck* =  $p_t$  damit es isentrop bleibt und kein V.Stoss entsteht

## Lösung Aufgabe 6:

a) Die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (1)$$

Die Strömung ist eben, d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} = 0 \quad , \quad v = 0 \quad . \quad (2)$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad . \quad (3)$$

Damit folgt aus (1):

$$u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad . \quad (4)$$

Die Strömung ist in  $x$ -Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in  $x$ -Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad (5)$$

Mit den Gleichungen (2) und (5) und  $\rho(z) \neq f(x)$  folgt aus (4):

$$\frac{d(\rho \cdot w)}{dz} = 0 \quad . \quad (6)$$

Daraus folgt  $\rho \cdot w = C$  mit der Integrationskonstanten  $C$ . An den Wänden gilt die Haftbedingung, d. h.  $w(z=0) = w(z=s) = 0$  bzw.  $\rho(z=0) \cdot w(z=0) = \rho(z=s) \cdot w(z=s) = 0$ . Die Lösung (6) in die Randbedingung eingesetzt führt zu  $\rho(z) \cdot w(z) = 0$  bzw. zu  $w(z) = 0$ .

b) Die dreidimensionale Energiegleichung lautet:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) \\ -p \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho \cdot \dot{q}_s + \mu \cdot \left( 2 \cdot \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ &\left. + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \quad . \quad (7) \end{aligned}$$

Mit  $\lambda = \text{konst.}$ , der Vernachlässigung der Dissipation  $\Phi = 0$ , keiner weiteren Wärmezu- oder abfuhr  $\dot{q}_s = 0$ ,  $w = 0$  und den Gleichungen (2) und (3) folgt daraus:

$$\rho \cdot u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - p \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad . \quad (8)$$

Mit Gleichung (4) und  $T(z) \neq f(x)$  folgt daraus:

$$\rho \cdot u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad . \quad (9)$$

Für Wasser gilt  $e = c_v \cdot T$  mit  $c_v = \text{konst...}$  Damit ergibt sich:

$$\rho \cdot u \cdot c_v \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad . \quad (10)$$

Damit ergibt sich mit einem in  $x$ -Richtung ausgebildetes Temperaturprofil ( $\partial T / \partial x = 0$ ):

$$\lambda \cdot \frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad \implies \quad \frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad (11)$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$T(z) = C_1 \cdot z + C_2 \quad (12)$$

Mit den Randbedingungen  $T(z = 0) = T_1$  und  $T(z = s) = T_2$  ergibt sich die Lösung:

$$T(z) = (T_2 - T_1) \cdot \frac{z}{s} + T_1 \quad (13)$$

Für die Dichte folgt damit:

$$\rho(z) = \rho_m + \alpha \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (T_1 + T_2) - (T_2 - T_1) \cdot \frac{z}{s} - T_1 \right)$$

und nach einer Umformung:

$$\rho(z) = \rho_m + \alpha \cdot (T_2 - T_1) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{s} \right) \quad (14)$$

c) Die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen lauten:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (15)$$

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (16)$$

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad . \quad (17)$$

Mit Gleichung (2), (3), (5) und  $w = 0$  folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \\ 0 &= f_y \quad , \\ 0 &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad . \end{aligned}$$

Als Massenkraft tritt nur die Schwerkraft in negative  $z$ -Richtung auf, sodass gilt  $f_x = f_y = 0$  und  $f_z = -\rho \cdot g$ . Wegen der ausgebildeten Strömung ist  $u$  keine Funktion von  $x$  und wegen der ebenen Strömung keine Funktion von  $y$ . Damit gilt  $u = u(z)$  und  $\partial u / \partial z = du / dz$ . Eingesetzt ergibt sich:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \cdot \frac{d^2 u}{dz^2} \quad , \quad (18)$$

$$0 = 0 \quad , \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g \quad . \quad (20)$$

Gleichung (19) fällt weg. Aus Gleichung (18) ergibt sich:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = konst. \quad .$$

Damit ist  $\partial p/\partial x$  keine Funktion von  $z$ . Damit kann die Gleichung 2 mal integriert werden und es ergibt sich:

$$u(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot z^2 + C_3 \cdot z + C_4 \quad . \quad (21)$$

Die Haftbedingung als Randbedingung ergibt an der unteren Wand  $u(z=0) = 0$ . Daraus folgt  $C_4 = 0$ . An der oberen Wand ergibt sich mit der Haftbedingung  $u(z=s) = U$ . Eingesetzt in Gleichung (21) folgt mit  $C_4 = 0$ :

$$C_3 = \frac{U}{s} - \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot s^2 \quad .$$

$C_3$  eingesetzt in (21) ergibt für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von  $\partial p/\partial x$ :

$$u(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot (z^2 - s \cdot z) + U \cdot \frac{z}{s} \quad . \quad (22)$$

- d) Wegen der ebenen Strömung kann der Druck  $p$  keine Funktion von  $y$  sein. Aus Gleichung (20) folgt damit durch partielle Integration:

$$p(x, z) = -\rho \cdot g \cdot z + h(x) \quad . \quad (23)$$

Dabei ist  $h$  eine noch zu bestimmende Funktion die nur von  $x$  abhängt. Setzt man Gleichung (23) jetzt in Gleichung (22) ein erhält man:

$$u(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{dh}{dx} \cdot (z^2 - s \cdot z) + U \cdot \frac{z}{s} \quad . \quad (24)$$

Mit der Randbedingung, dass die Geschwindigkeit in der Mitte des Kanals gleich Null sein soll ( $u(z=s/2) = 0$ ) folgt aus Gleichung (24):

$$\frac{dh}{dx} = 4 \cdot U \cdot \mu \quad .$$

Die Integration dieser Gleichung führt zu:

$$h(x) = 4 \cdot U \cdot \mu \cdot x + C_5 \quad . \quad (25)$$

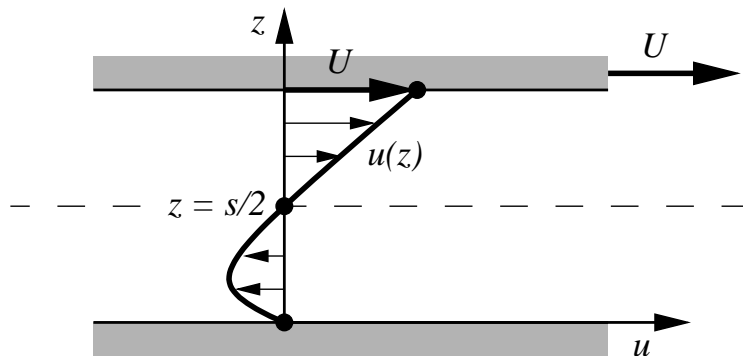
Gleichung (25) eingesetzt in Gleichung (23) ergibt für die Druckverteilung:

$$p(x, z) = -\rho \cdot g \cdot z + 4 \cdot U \cdot \mu \cdot x + C_5 \quad . \quad (26)$$

Die Bedingung, dass der Druck an der Stelle 1 der unteren Wand gleich  $p_1$  ist führt auf die Randbedingung  $p(x=0, z=0) = p_1$ . Eingesetzt in Gleichung (26) folgt  $C_5 = p_1$ . Damit ergibt sich die Druckverteilung im Kanal zu:

$$p(x, z) = p_1 + 4 \cdot U \cdot \mu \cdot x - \rho \cdot g \cdot z \quad . \quad (27)$$

- e) Die Haftbedingung ergibt  $u(z=s) = U$  und  $u(z=0) = 0$ . In der Mitte des Kanal ist die Geschwindigkeit Null  $u(z=s/2) = 0$ . Die Lösung der Geschwindigkeit  $u(z)$  (Gleichung (21)) ist eine Parabel. Damit ergibt sich folgende Skizze des Geschwindigkeitsprofils  $u(z)$ :



f) Der Druck an der Stelle 2 in der Strömung ergibt sich über  $p_2 = p(x = L, z = s/2)$ :

$$p_2 = p_1 + 4 \cdot U \cdot \mu \cdot L - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot s \quad .$$

g) Das Ergebnis ändert sich nicht, da die Dissipationsterme in der Energiegleichung vernachlässigt werden und somit keine Geschwindigkeitsabhängigkeit der Lösung auftritt.